

769

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
АРХИТЕКТУРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

КАФЕДРА СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

РАСЧЕТ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ
НА УДАР И ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ

Методические указания

к контрольным задачам
по курсу "Сопротивление материалов"
для студентов специальности ПГС
заочной формы обучения

Воронеж 2003

Библиотека ВГАСУ

Составители А.В. Резунов, В.С. Сафронов, А.Н. Синозерский

УДК 624
ББК 30.121

Расчет элементов конструкций на удар и продольно-поперечный изгиб: Методические указания к контрольным задачам по курсу "Сопротивление материалов"/Сост.: А.В. Резунов, В.С. Сафронов, А.Н. Синозерский; Воронеж. гос. арх.-строит. ун.-т. – Воронеж: 2003. - 23 с.

Приводятся указания о выполнении расчетов двутавровой балки на удар и стержня при продольно-поперечном изгибе. Даны примеры аналитических решений. В приложениях представлены сведения из ГОСТ о прокатных двутаврах и коэффициентах снижения расчетного сопротивления, приводятся таблицы с готовыми данными о перемножениях простейших эпюр по правилу Верещагина и протоколы расчетов на ПЭВМ балки на удар и стержня на поперечную нагрузку по программам **УДАР** и **БАЛКА**.

Предназначены для студентов специальности ПГС заочной формы обучения.

Ил. 6. Библиогр.: 2 назв.

Печатается по решению Редакционно-издательского совета Воронежского государственного архитектурно-строительного университета.

Рецензент – Котуков А.Н., кандидат технических наук, доцент ВГАСУ

1. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

В курсе сопротивления материалов в основном рассматривались статически нагруженные элементы конструкций, когда внешние силы считались постоянными. Для определения возникающих при этом в изучаемом объекте усилий, напряжений, деформаций и перемещений в подавляющем большинстве случаев привлекался принцип независимости действия сил или суперпозиции.

В инженерной практике приходится иметь дело и с **динамическими** нагрузками, достаточно быстро изменяющими величину или место приложения. Например, при взаимодействии движущегося тела с неподвижным телом или системой, называемом **ударом**, за короткий промежуток времени резко изменяются скорости тел, систем и их частей. Динамическое напряжение σ_d в ударяемом теле приближенно вычисляется по формуле /1, 2/

$$\sigma_d = \mu_d \cdot \sigma_o, \quad (1.1)$$

где σ_o – напряжение, возникающее при статическом действии на ударяемое тело силового ударяющего фактора, приложенного в месте соударения в направлении удара; $\mu_d > 1$ – безразмерный **динамический коэффициент**.

Аналогичным образом находят динамические усилия ($N_d = \mu_d \cdot N$), деформации ($\epsilon_d = \mu_d \cdot \epsilon$) и перемещения ($\Delta_d = \mu_d \cdot \Delta$). Определение σ_d при падении груза на балку приводится в п.2.

При сложном сопротивлении коротких жестких стержней использовали принцип суперпозиции, вычисляя наибольшее нормальное напряжение по формуле /1, 2/:

$$\max \sigma = \sigma^F + \sigma^M,$$

где $\sigma^F = F/A$ и $\sigma^M = M/W$ – напряжения от центрально приложенной в продольном направлении силы F и изгибающего момента M от поперечной нагрузки (F, m, q); A и W – площадь и момент сопротивления изгибу поперечного сечения стержня.

Однако в случае искривления оси элемента, нагруженного сжимающей силой F и F_3, m, q , возникают перемещения Δ не только от поперечной нагрузки, но и от продольной. Если поперечная нагрузка одного направления и располагается симметрично относительно середины длины L стержня (рис. 1), то наибольшее по абсолютной величине сжимающее напряжение имеет место в сечении с координатой $x=L/2$ и определяется из выражения /1, 2/:

$$\max \sigma = \frac{F}{A} + \frac{M_z}{W_z} + \frac{F \cdot \max \Delta}{W_z} = \frac{F}{A} + \frac{M_z}{W_z} + \frac{F}{W_z} \cdot \frac{\Delta(L/2)}{(1 - \frac{F}{F_3})} \quad (1.2)$$

с эйлеровой силой для стержня с шарнирно закрепленными концами

$$F_3 = \pi^2 \cdot E \cdot J_z / L^2 \quad (1.3)$$

и прогибом посередине длины L от совместного действия F и F_3, F_3, m, q

$$\max \Delta = \Delta(L/2) / [1 - F/F_3], \quad (1.4)$$

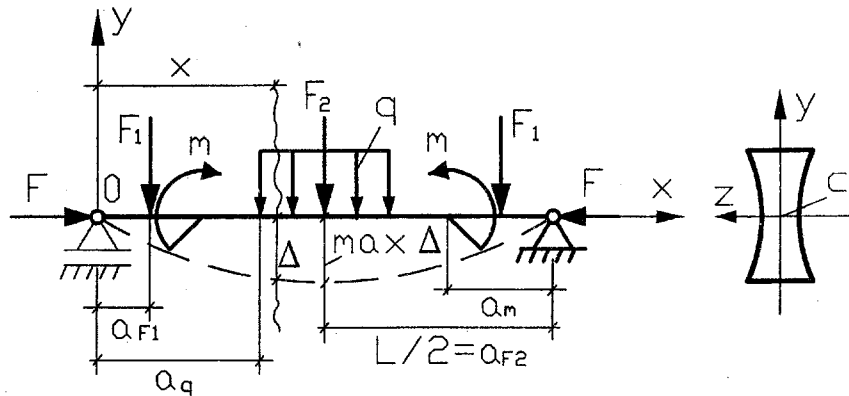


Рис. 1

где M_z и $\Delta(L/2)$ – наибольшие изгибающий момент и прогиб при $x=L/2$ только от поперечной нагрузки; J_z и W_z – моменты инерции и сопротивления изгибу поперечного сечения элемента относительно главной центральной оси z , перпендикулярной плоскости действия поперечной нагрузки; E – модуль упругости материала стержня.

Выражение $F \cdot \Delta(L/2) / W_z [1 - (F/F_0)]$, а следовательно, и $\max \sigma$ нелинейно зависят от сжимающей силы F . Поэтому в рассматриваемом случае, называемом **продольно-поперечным изгибом**, принцип суперпозиции **не применим**. Расчет стержня на совместное действие F и F_0 , m , q изложен в п.3.

2. РАСЧЕТ БАЛКИ НА УДАР

2.1. Задание

Студенту выдаются: номер и расчетная схема двухопорной или двухопорной с консолью балки, размеры a и b ее участков, коэффициент податливости α одной из опор, (например, при установке резиновых опорных частей – РОЧ); вес груза G_0 , высота h_0 , с которой он падает, и место соударения с балкой - сечение e ; модуль упругости материала E и номер прокатного двутавра, из которого изготовлено ударяемое тело.

Соблюдая масштаб, изображают расчетную схему, указывают размеры a и b , коэффициент податливости α , вес G_0 и высоту падения h_0 , модуль E , номер двутавра и из таблицы сортамента (см. прил.1) выписывают значения погонной массы m , моментов инерции J_z и сопротивления изгибу W_z . Так, для схемы №1 с $a=b=3,0$ м, $\alpha=4 \cdot 10^{-3}$ м/кН, $G_0=3,0$ кН и $h_0=0,10$ м имеем случай, представлен-

ный на рис. 2. Полагая, что балка изготовлена из двутавра № 20 ГОСТ 8239-89 с $E=200$ ГПа, $m_s=21$ кг/м, $J_z=1840$ см⁴ и $W_z=184$ см³, рассмотрим этот случай в качестве расчетного примера.

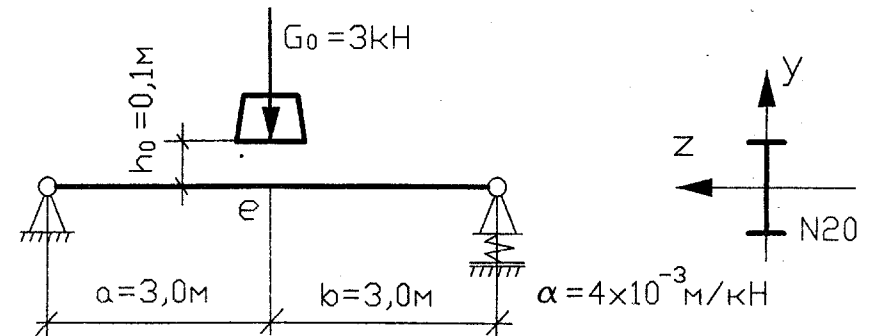


Рис. 2. М 1:30

Требуется:

- от статического действия на балку груза G_0
 - построить эпюру изгибающих моментов M ;
 - определить наибольшее нормальное напряжение σ_0 ;
 - без учета податливости опоры любым способом найти вертикальное перемещение Δ сечения e ;
 - установить прогибы сечения e только от податливости опоры $\Delta\alpha$ и суммарный $\Delta\Sigma = \Delta + \Delta\alpha$;
- без учета податливости опоры найти динамические коэффициент μ_d и наибольшее напряжение σ_d ;
- вычислить $\mu_{d\alpha}$ и $\sigma_{d\alpha}$ с учетом податливости опоры и отношение $\sigma_{d\alpha} / \sigma_d$.

2.2. Методические указания и пример аналитического расчета

2.2.1. Расчет балки на статическое действие груза G_0

Случай нагружения балки силой G_0 с составляющими опорных реакций R_n , H_n , R_n приведен на рис. 3а.

Из уравнений $\sum m_n = 0$, $\sum m_n = 0$ и $\sum x = 0$ получаем $R_n = G_0/2 = 3/2 = 1,5$ кН, $R_n = G_0/2 = 1,5$ кН и $H_n = 0$.

Проверка: $\sum y = 0 \dots R_n - G_0 + R_n = 1,5 - 3,0 + 1,5 = 0$.

Изгибающие моменты на расстоянии x_1 от левого и x_2 от правого концов балки определяются выражениями:

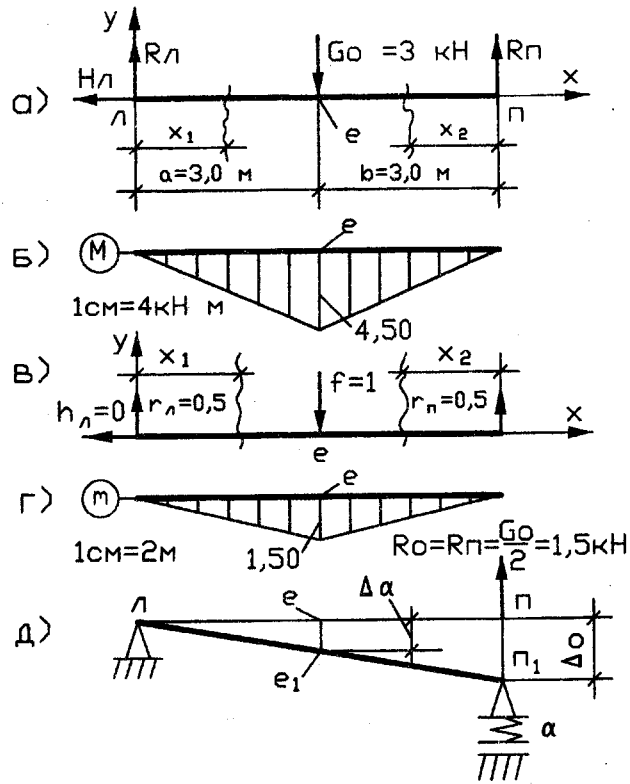


Рис. 3. М 1:100

$$M(x_1) = R_{\text{л}} \cdot x_1 = 1,5 \cdot x_1, \quad (2.1)$$

$$M(x_2) = R_{\text{п}} \cdot x_2 = 1,5 \cdot x_2, \quad (2.2)$$

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq x_1 \leq a = 3,0 \text{ м} \\ 0 \leq x_2 \leq b = 3,0 \text{ м} \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

где

Тогда $M(x_1=0)=0$, $M(x_1=a)=1,5 \cdot 3=4,5$ кН·м и $M(x_2=0)=0$, $M(x_2=b)=1,5 \cdot 3=4,5$ кН·м. Соответствующая этим данным эпюра изгибающих моментов M построена на рис. 3, б.

Наибольшее нормальное напряжение в балке вычисляют по формуле

$$\sigma_0 = \max M / W_z, \quad (2.4)$$

где $\max M$ - наибольший по модулю изгибающий момент эпюры M ; W_z - момент сопротивления изгибу двутаврового поперечного сечения. В рассматриваемом случае при $\max M = 4,5$ кН·м и $W_z = 184$ см³ будем иметь:

$$\sigma_0 = 4,5 \cdot 10^3 / 184 \cdot 10^{-6} = 24,46 \text{ МПа.}$$

Вертикальное перемещение Δ сечения e можно найти, например, по формуле Максвелла-Мора [1, 2]:

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i\text{н}}}^{x_{i\text{к}}} \frac{M(x_i) \cdot m(x_i)}{E_i \cdot J_{z_i}} \cdot dx, \quad (2.5)$$

где $i=1, 2, \dots, n$ - номера участков балки; $x_{i\text{н}}$ и $x_{i\text{к}}$ - координаты x_i в начале и конце i -того участка; $M(x_i)$ и $m(x_i)$ - аналитические выражения изгибающих моментов при $x=x_i$ от заданной нагрузки и от единичной безразмерной вертикальной силы $f=1$, приложенной в сечении, где определяется прогиб Δ ; E_i и J_{z_i} - модуль упругости материала и момент инерции балки, соответствующие номеру i .

Состояние $f=1$ и реакции опор $r_{\text{л}}=0,5$, $r_{\text{п}}=0,5$ представлены на рис. 3, в. При этом

$$m(x_1) = 0,5 \cdot x_1, \quad (2.6)$$

$$m(x_2) = 0,5 \cdot x_2, \quad (2.7)$$

с x_1 и x_2 по условиям (2.3), моментами $m(x_1=0)=0$, $m(x_1=a)=1,5$ м и $m(x_2=0)=0$, $m(x_2=b)=1,5$ м и эпюрой m - рис. 3, г.

С учетом $i=1, n=2$, (2.1), (2.2), (2.3), (2.6), (2.7), $E=2 \cdot 10^8$ кПа и $J_z=1840 \cdot 10^8$ м⁴ по формуле (2.5) вычисляем прогиб:

$$\begin{aligned} \Delta &= \left(\int_0^{3,0} 1,5x_1 \cdot 0,5x_1 dx + \int_0^{3,0} 1,5x_2 \cdot 0,5x_2 dx \right) \cdot \frac{1}{2 \cdot 10^8 \cdot 1840 \cdot 10^{-8}} = \\ &= \left(\frac{0,75 \cdot x_1^3}{3} \Big|_0^{3,0} + \frac{0,75 \cdot x_2^3}{3} \Big|_0^{3,0} \right) \cdot \frac{1}{3680} = \left(\frac{0,75 \cdot 3^3}{3} + \frac{0,75 \cdot 3^3}{3} \right) \cdot \frac{1}{3680} = \\ &= 3,67 \cdot 10^{-3} \text{ м.} \end{aligned}$$

Перемещения $\Delta\alpha$ и $\Delta\Sigma$ сечения e только от податливости опоры и суммарное определяются выражениями:

$$\Delta\alpha = \beta \cdot \Delta_0 \quad (2.8)$$

$$\text{и} \quad \Delta\Sigma = \Delta + \Delta\alpha, \quad (2.9)$$

$$\text{где} \quad \Delta_0 = \alpha \cdot R_0 - \quad (2.10)$$

осадка опоры с коэффициентом податливости α ; R_0 - реакция той же опоры от действия на балку груза G_0 (направления Δ_0 и R_0 - противоположны); β - коэффициент, устанавливающий зависимость между Δ_0 и перемещением $\Delta\alpha$, вызванным поворотом балки, как жесткого целого, вокруг шарнира неподатливой опоры.

В примере (см. рис. 3, д) при $\alpha=4 \cdot 10^{-3}$ м/кН, $R_0=R_{\text{п}}=G_0/2=1,5$ кН по (2.10) получаем: $\Delta_0=4 \cdot 10^{-3} \cdot 1,5=6 \cdot 10^{-3}$ м, и балка займет положение $ле_1$ и $лп_1$. Тогда из подобия треугольников $ле_1$ и $лп_1$ находим коэффициент

$$\beta = a/(a+b) = 3/(3+3) = 0,5,$$

а в соответствии с (2.8) и перемещение

$$\Delta\alpha = 0,5 \cdot 6 \cdot 10^{-3} = 3 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

После чего по формуле (2.9) вычисляем:

$$\Delta\Sigma = 3,67 \cdot 10^{-3} + 3,00 \cdot 10^{-3} = 6,67 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

2.2.2. Расчет балки на ударное воздействие

Определяют:

массу падающего груза – $M_0 = G_0/g$;

полную массу двутавровой балки – $M_B = m_S(a+b)$;

коэффициент приведения массы балки к точке удара –

$$\kappa = \frac{2 + \gamma \cdot (4 - \gamma - 6 \cdot \gamma^2 + 3 \cdot \gamma^3)}{105 \cdot \gamma^2 \cdot (1 - \gamma)^2} \quad (2.11)$$

(при $\gamma = a/(a+b)$ – в случае двухопорной балки пролетом $a+b$),

или

$$\kappa = \frac{8 + \gamma^3 \cdot (140 + 231 \cdot \gamma + 99 \cdot \gamma^2)}{420 \cdot \gamma^2 \cdot (1 + \gamma)^3} \quad (2.12)$$

(при $\gamma = a/b$ – для балки с расстоянием b между опорами и консолью длиной a),

где $g = 9,81$ м/с² – ускорение свободного падения тела; m_s – погонная масса балки.

В рассматриваемом примере $M_0 = 3 \cdot 10^3 / 9,81 = 305,8$ кг, $M_B = 21 \cdot (3,0 + 3,0) = 126,0$ кг, $\gamma = 3,0 / (3,0 + 3,0) = 0,5$ и

$$\kappa = \frac{2 + 0,5 \cdot (4 - 0,5 - 6 \cdot 0,5^2 + 3 \cdot 0,5^3)}{105 \cdot 0,5^2 \cdot (1 - 0,5)^2} = \frac{17}{35} = 0,486.$$

Полагая опоры неподатливыми, находим динамические: коэффициент

$$\mu_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h_0}{\Delta} \cdot \frac{M_0}{M_0 + \kappa \cdot M_B}}; \quad (2.13)$$

наибольшие нормальные напряжения σ_d – по формуле (1.1).

Так, при падении груза $G_0 = 3$ кН с высоты $h_0 = 0,10$ м, найденных в п.2.2.1 от статического действия G_0 прогибе Δ и напряжении σ_0 , массах M_0 , M_B и κ п.2.2.2, получим:

$$\mu_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 0,10}{3,67 \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{305,8}{305,8 + 0,486 \cdot 126,0}} = 7,81;$$

$$\sigma_{d\alpha} = \mu_d \cdot \sigma_0 = 7,81 \cdot 24,46 = 191,0 \text{ МПа.}$$

С учетом податливости одной из опор имеем следующие выражения для динамического коэффициента:

$$\mu_{d\alpha} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h_0}{\Sigma\Delta} \cdot \frac{M_0}{M_0 + \kappa \cdot M_B}}; \quad (2.14)$$

и видоизмененное (1.1) для наибольших напряжений:

$$\sigma_{d\alpha} = \mu_{d\alpha} \cdot \sigma_0. \quad (2.15)$$

Подставляя в (2.14) и (2.15) заданную высоту h_0 падения груза G_0 (см. п.2.1), суммарный прогиб Δ (см. п.2.2.1), массы M_0 , M_B и κ настоящего пункта, будем иметь:

$$\mu_{d\alpha} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 0,10}{6,67 \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{305,8}{305,8 + 0,486 \cdot 126,0}} = 6,10;$$

$$\sigma_{d\alpha} = 6,10 \cdot 24,46 = 149,2 \text{ МПа.}$$

После чего вычисляем отношение динамических напряжений

$$\sigma_{d\alpha} / \sigma_d, \quad (2.16)$$

или с учетом полученных выше данных

$$\sigma_{d\alpha} / \sigma_d = 149,2 / 191,0 = 0,78.$$

Таким образом, податливость опоры снижает ударное воздействие на балку.

2.2.3. Инструкция по работе с программой UDAR

Программа UDAR, разработанная к.ф.-м.н Овсянниковой Е.Н. на языке ФОРТРАН для операционной системы DOS, а также в виде Delphi приложения WINDOWS, предназначена для проведения приближенного динамического расчета шарнирно опертой балки на удар.

Ввод исходных данных выполняется в диалоговом режиме путем ответов на запрашиваемые на мониторе ЭВМ параметры задачи либо путем редактирования в окне приложения файла шаблона в соответствии с содержащимися в нем комментариями.

Исходные данные запрашиваются в следующей последовательности:

- фамилия студента, инициалы, номер группы;
- тип балки: 0 – с консолью, 1 – без консоли;
- полная длина балки в м, включая консольный участок;
- расстояние в м между опорами (для консольной балки) или расстояние в м от левой опоры до подвергаемого ударному воздействию сечения (для бесконсольной балки);
- признак места расположения упругой опоры:
 - для консольной балки: 0 – если упругая опора примыкает к консоли, 1 – в противном случае;
 - для бесконсольной балки: 0 – если податливой является левая опора, 1 – в случае, когда податливой является правая опора балки;
- изгибная жесткость балки в ГН·м²;
- коэффициент податливости упругой опоры в м/кН;
- вес падающего груза в кН;
- высота падения груза в м;
- полный вес балки в кН;
- момент сопротивления балки в см³.

В программе, используемой для WINDOWS, исходные данные можно вводить в любой последовательности, но с обязательным применением указанных выше размерностей. В этом случае можно применять стандартные сочетания клавиш для редактирования текста.

Выходная информация выдается на экран монитора или на печать и включает в себя:

- исходные данные;
- максимальные динамические напряжения от удара в балке на жестких опорах;
- максимальные динамические напряжения от удара в балке на жестких опорах.

Для контроля правильности ввода исходных данных в алгоритме предусмотрена проверка их корректности. Например, при попытке ввести в качестве длины отрицательное число или символ, не являющийся цифрой, на экран выдается предупредительное сообщение и предлагается повторить ввод.

Протокол расчета по программе **УДАР** приводится в приложении 4.

3. ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ СТЕРЖНЯ

3.1. Задание

Назначаются:

значения приложенной центрально сжимающей продольной силы F , расположенных симметрично относительно середины пролета поперечных нагрузок F_1 , F_2 , m , q и расстояния a_{F1} , a_{F2} , a_m , a_q от опор до соответствующих силовых факторов;

номер прокатного двутавра, из которого изготовлен элемент конструкции;

номер и фасад расчетной схемы шарнирно опертого по концам стержня (см. рис. 1), длина L и одно из условий опирания концов в плане (1, 2, 3 или 4 по рис. 4).

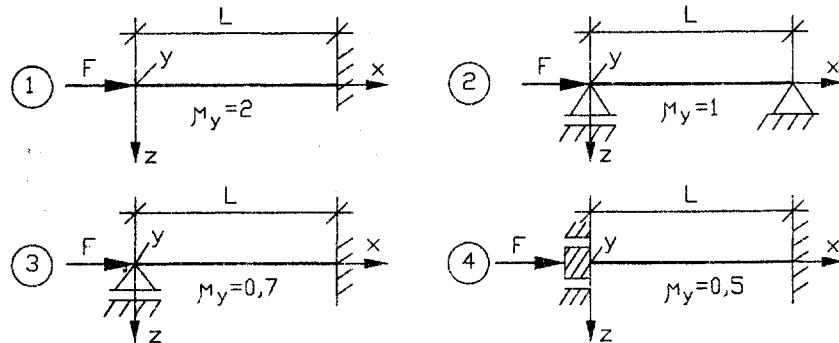


Рис. 4

Выписывают модули заданных внешних **воздействий** F , F_1 , F_2 , m , q , коэффициент μ_y (по данным рис. 4), номер двутавра и соответствующие (см. прил. 1) площадь A , моменты инерции J_z и сопротивления изгибу W_z , радиус инерции i_y .

Изображают фасад и план расчетной схемы, указывают масштаб и размеры a_{F1} , a_m , a_q и L .

Для материала стержня принимают модуль упругости материала $E=200$ а, расчетное сопротивление $R=200$ МПа и нормативный коэффициент запаса прочности $[k]=1,1$.

Пусть $F=12$ кН, $F_1=F_2=m=0$, $q=2,6$ кН/м и $a_{F1}=a_{F2}=a_m=0$, $a_q=1,75$ м. Стержень изготовлен из двутавра № 10 ГОСТ 8239-89 с $A=12$ см², $J_z=198$ см⁴, $=39,7$ см³, $i_y=1,22$ см (см. прил. 1). Фасад и расчетная схема № 1 при $L=3,5$ м $\nu_y=0,5$ (условие опирания в плане 4 – см. рис. 4). То есть имеем случай, предвденный на рис. 5, который в дальнейшем рассматривается в качестве расчетного примера.

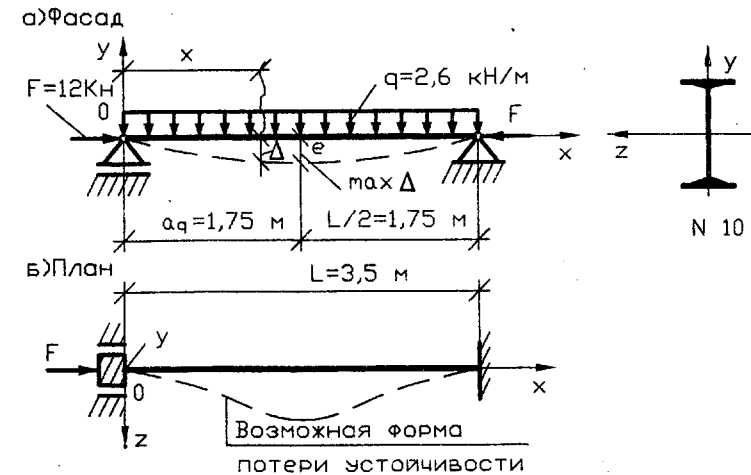


Рис. 5. М 1:50

Требуется:

- 1) от действия поперечной нагрузки (F_1 , F_2 , m , q)
 - построить эпору изгибающих моментов M ;
 - любым способом найти вертикальное перемещение $\Delta(L/2)$ равноотстоящего от опор сечения e или (по желанию студента) выполнить этот расчет на ПЭВМ;
- 2) от совместного действия продольной силы F и F_1 , F_2 , m , q
 - вычислить наибольший прогиб $\max V$ при $x=L/2$;
 - проверить видоизмененное условие прочности;
 - определить действительный коэффициент запаса прочности k ;
- 3) используя коэффициент φ (см. прил. 2) снижения расчетного сопротивления R , оценить устойчивость стержня в перпендикулярной поперечной нагрузке плоскости.

3.2. Методические указания и пример аналитического расчета

3.2.1. Изгибающие моменты и наибольший прогиб от поперечной нагрузки

Действие на стержень заданных сил $F_1=F_2=m=0$, $q=2,6$ кН/м и составляющих опорных реакций $R_n=R_n$ (в силу симметрии по поперечной нагрузке) и H_n представлено на рис. 6, а.

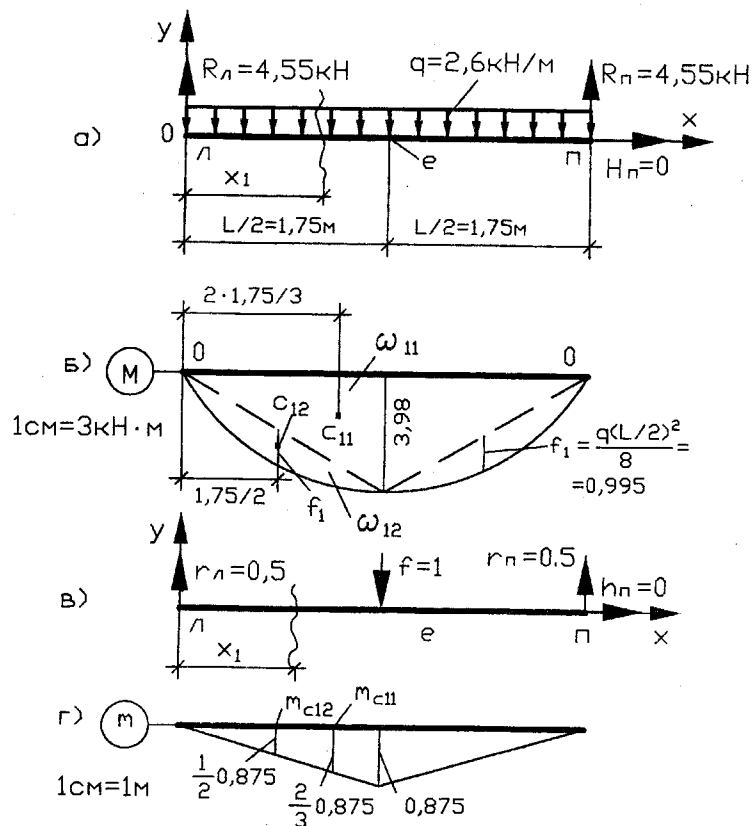


Рис. 6. М 1:50

Из уравнений $\sum y=0...$

$R_n \cdot q \cdot L + R_n = 2R_n - 2,6 \cdot 3,5 = 2R_n - 9,1 = 0$ и $\sum x=0$
получаем: $R_n = R_n = 4,55$ кН и $H_n = 0$.

Проверка: $\sum m_n = 0...$

$$-R \cdot L + q \cdot L \cdot (L/2) = -4,55 \cdot 3,50 + 2,6 \cdot 3,50 \cdot 1,75 = -15,93 + 15,93 = 0$$

Для построения эпюры изгибающих моментов M следует рассмотреть только часть стержня длиной $L/2$. Разделить эту часть на участки в соответствии с действующей поперечной нагрузкой. Составить выражения $M(x_i)$ и найти изгибающие моменты в начале $M(x_{in})$ и конце $M(x_{i2})$ участка i . По полученным данным, соблюдая масштаб, изобразить эпюру M , симметричную относительно середины пролета. При этом ординаты $M(x_{in})$, $M(x_{i2})$ отложить со стороны нижней растянутой зоны стержня и соединить прямыми линиями. Если на рассматриваемом участке действует равномерно распределенная нагрузка интенсивностью q , то определить стрелку параболы

$$f_i = q \cdot l_i^2 / 8, \quad (3.1)$$

где l_i – длина участка i . Отложить f_i в принятом масштабе M посередине l_i вниз от прямой, проведенной через $M(x_{in})$ и $M(x_{i2})$. Полученные таким образом три точки эпюры M соединить плавной кривой.

В случае, представленном на рис. 6, а, для левой половины стержня имеем один участок при $0 \leq x_1 \leq l_1 = L/2 = 1,75$ м

$$с \quad M(x_1) = R_n \cdot x_1 - q \cdot (x_1^2 / 2) = 4,55 \cdot x_1 - 2,6 \cdot (x_1^2 / 2)$$

$$и \quad M(x_1=0) = 0, \quad M(x_1=1,75) = 4,55 \cdot 1,75 - 2,6 \cdot (1,75^2 / 2) = 3,98 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

На рис. 6, б ординаты $M(x_1=0)$ и $M(x_1=1,75)$ соединены штриховыми линиями на левой и правой половинах стержня.

Участок нагружен равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью $q=2,6$ кН/м и, следовательно, по зависимости (3.1)

$$f_1 = 2,6 \cdot 1,75^2 / 8 = 0,995 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Эпюра изгибающих моментов M построена на рис. 6, б. Наибольший $M_z = 3,98$ кН·м имеет место в сечении e при $x = L/2 = 1,75$ м.

Вертикальное перемещение $\Delta(L/2)$ посередине пролета L будем определять, например, по формуле (2.5). Так как жесткость стержня $E J_z = const$, то (2.5) на участке i запишем в виде:

$$(1 / E \cdot J_z) \cdot \int_{x_{in}}^{x_{i2}} M(x_i) \cdot m(x_i) \cdot dx.$$

Интеграл, входящий в это выражение в соответствии с правилом Верещагина /1, 2/, равен произведению площади $\omega(x_i)$ эпюры $M(x_i)$ (любой по очертянию) на расположенную под ее центром тяжести ординату $m_c(x_i)$ прямолинейной эпюры $m(x_i)$. То есть

$$\int_{x_{in}}^{x_{i2}} M(x_i) \cdot m(x_i) \cdot dx = \omega(x_i) \cdot m_c(x_i).$$

Величина $\omega(x_i) \cdot m_c(x_i)$ считается положительной, если обе эпюры располагаются по одну сторону стержня, и отрицательной, если по разные стороны. Положительный результат перемножения эпюр свидетельствует, что перемещение совпадает с направлением силы $f=1$, приложенной в сечении, прогиб которого определяется. Когда обе функции $M(x_i)$ и $m(x_i)$ линейные, можно умножать площадь любой из эпюр на соответствующую ординату другой.

Таким образом, с учетом симметрии нагрузки

$$\Delta(L/2) = \frac{2}{E \cdot J_z} \cdot \sum_{i=1}^n \omega_{ij}(x_i) \cdot m_{Cij} \cdot (x_i), \quad (3.2)$$

где $i=1, 2, \dots, n$ – номера участков на части стержня длиной $L/2$; $\omega_{ij}(x_i)$ площадь j -тых простейших эпюр (прямоугольной, треугольной или квадратной параболы), из которых составлена площадь $\omega_i(x_i)$ эпюры $M(x_i)$ на участке i ; m_{Cij} – расположенная под центром тяжести $\omega_{ij}(x_i)$ ордината прямолинейной эпюры $m(x_i)$ на i -том участке.

Для ускорения вычислений можно использовать таблицы (см. прил. 3).

Состояние $f=I$ с реакциями опор $r_n=0,5$, $r_n=0,5$, $h_n=0$ см. рис. 6, в.

При построении эпюры m рассматривают часть стержня длиной $L/2$. Число участков и границы их принимаются такими же, как при составлении выражений изгибающих моментов M . Уравнение момента на i -том участке имеет вид:

$$m(x_i) = 0,5 x_i. \quad (3.3)$$

Вычислив $m(x_{in}) = 0,5 x_{in}$ и $m(x_{ik}) = 0,5 x_{ik}$, строят эпюру m в соответствии с рекомендациями, изложенными выше, в отношении эпюры M .

По условиям рис. 6, а, на левой половине элемента будет один участок при $0 \leq x_i \leq l_i = L/2 = 1,75$ м с зависимостью (3.3)

$$m(x_i) = 0,5 x_i$$

и $m(x_{in}) = 0$, $m(x_{ik}) = 0,5 \cdot 1,75 = 0,875$ м. Эпюра m представлена на рис. 6, г.

Площадь $\omega(x_i)$ эпюры $M(x_i)$ (см. рис. 6, б) равна сумме площадей треугольника $\omega_{11} = 0,5 \cdot 3,98 \cdot 1,75 = 3,48$ кН·м² и квадратной параболы $\omega_{12} = 2 \cdot f_1 \cdot l_1/3 = 2 \cdot 0,995 \cdot 1,75/3 = 1,16$ кН·м². Центры тяжести c_{11} и c_{12} этих площадей располагаются на расстояниях $2 \cdot l_1/3 = 2 \cdot 1,75/3 = 1,167$ м и $l_1/2 = 1,75/2 = 0,875$ м. Ординаты эпюры $m(x_i)$ (см. рис. 6, г) под c_{11} и c_{12} составляют $(2/3)$ и $(1/2)$ от $m(x_i = l_1) = 0,875$ м, то есть $m_{C11} = 2 \cdot 0,875/3 = 0,583$ м и $m_{C12} = 0,875/2 = 0,438$ м.

Подставляя ω_{11} , m_{C11} , ω_{12} , m_{C12} и $EJ_z = 2 \cdot 10^8 \cdot 198 \cdot 10^8 = 396$ кН·м² в формулу (3.2), находим перемещение

$$\Delta(L/2) = (2/396) \cdot (3,48 \cdot 0,583 + 1,16 \cdot 0,438) = 1,28 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

Проверка. Воспользовавшись данными прил. 3, найдем

$$\omega_{11} m_{C11} = M_{1k} m_{1k} \cdot l_1/3 = 3,98 \cdot 0,875 \cdot 1,75/3 = 2,031 \text{ кН·м}^2 - \text{правило 3.2;}$$

$$\omega_{12} m_{C12} = f_1 m_{1k} \cdot l_1/3 = 0,995 \cdot 0,875 \cdot 1,75/3 = 0,508 \text{ кН·м}^2 - \text{правило 5.2.}$$

Тогда

$$\Delta(L/2) = (2/396) \cdot (2,031 + 0,508) = 1,28 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

По желанию студент может в вычислительном центре ВГАСУ произвести расчет перемещений стержня на ПЭВМ по программе **BALKA** и представить протокол расчета (см. прил. 5). Одновременно проверяются опорные реакции $R_n = R_n$ и наибольший изгибающий момент M_z от поперечной нагрузки, найденные в результате аналитического решения вручную.

3.2.2. Инструкция для работы с программой **BALKA**

Программа **BALKA**, разработанная к.ф.-м.н. Резуновым А.В. в виде Delphi приложения, предназначена для расчета статически определенной балки посто-

янной жесткости на действие сосредоточенных и линейно распределенных нагрузок.

Ввод исходных данных выполняется путем редактирования в окне приложения файла шаблона в соответствии с содержащимися в нем комментариями. Начало отсчета выбрано на левом конце балки, ось Ox направлена вправо. Сосредоточенные силы и распределенные нагрузки считаются положительными, если направлены вверх. Момент пары сил считается положительным, если направлен по часовой стрелке.

Исходные данные расположены в следующем порядке:

- фамилия студента, инициалы, номер группы;
- тип балки: 0 – шарнирно опертая, 1 – консольная;
- длина балки;
- для шарнирно опертой балки координаты опор (для консольной балки эти данные игнорируются);
- жесткость EJ_z балки;
- число сосредоточенных сил и для каждой силы величина и координата точки приложения;
- число пар сил и для каждой пары величина и координата сечения, в котором она действует;
- число распределенных нагрузок и для каждой из них интенсивность нагрузки в начале и в конце участка, на котором она действует, и координаты концов этого участка.

Вводить исходные данные можно в любой последовательности. При этом доступны стандартные для WINDOWS сочетания клавиш для редактирования текста.

Выходная информация выдается на экран монитора и включает в себя:

- исходные данные;
- значения опорных реакций;
- величину максимального изгибающего момента и координату сечения, в котором он действует;
- таблицу значений поперечной силы, изгибающего момента и прогибов на множестве равноотстоящих сечений.

Кроме того, в число расчетных сечений включаются те, в которых действуют сосредоточенные нагрузки. При этом искомые величины находятся непосредственно слева и справа от этих сечений. При необходимости включить в число расчетных некоторое конкретное сечение следует задать в этом сечении фиктивную сосредоточенную силу нулевой величины.

Для расчета балки на действие нелинейно распределенной нагрузки необходимо разбить нагрузку на участки, на каждом из которых заменить нелинейную эпюру трапецией.

Для облегчения использования программы предусмотрена проверка корректности исходных данных. Например, при попытке ввести в качестве длины балки отрицательное число или символ, не являющийся цифрой, выдается предупредительное сообщение и предлагается повторить ввод. По желанию пользователя выходные данные можно напечатать.

С содержанием данного раздела можно ознакомиться, выбрав соответствующий пункт главного или всплывающего меню.

3.2.3. Расчет на совместное действие продольной силы и поперечной нагрузки

По формулам (1.3) и (1.4) найти эйлерову силу F_2 и наибольший прогиб $\max \Delta$ при $x=L/2$.

Проверить видоизмененное условие прочности:

$$\frac{F}{A} + \frac{M_z}{W_z} + \frac{F \cdot [k]}{W_z} \cdot \frac{\Delta(L/2)}{(1-\psi \cdot [k])} \leq R, \quad (3.4)$$

где F – продольная сила; A – площадь поперечного сечения стержня; M_z , W_z и $\Delta(L/2)$ – см. (1.2); $[k]=1,1$ – нормативный коэффициент запаса прочности; $R=200$ МПа – расчетное сопротивление материала;

$$\psi = F/F_y, \quad (3.5)$$

Пусть действительный коэффициент запаса прочности элемента, испытывающего продольно-поперечный изгиб, равен k . Тогда при возрастании всех внешних сил в k раз наибольшее по абсолютной величине сжимающее напряжение $\max \sigma$ станет равным нормативному сопротивлению $R_n = R[k] = 200 \cdot 1,1 = 220$ МПа, и с учетом (1.2) будем иметь уравнение

$$\frac{F \cdot k}{A} + \frac{M_z \cdot k}{W_z} + \frac{F \cdot k}{W_z} \cdot \frac{\Delta(L/2)k}{(1-\psi \cdot k)} = R_n, \quad (3.6)$$

которое после преобразований приводится к виду:

$$Bk^2 - Ck + R_n = 0, \quad (3.7)$$

с коэффициентами

$$B = \psi \cdot D - \frac{F \cdot \Delta(L/2)}{W_z}, \quad (3.8)$$

$$C = D + \psi \cdot R_n \quad (3.9)$$

и параметром

$$D = (F/A) + (M_z/W_z). \quad (3.10)$$

Корень уравнения (3.7), который является решением задачи, найдем по формуле

$$k = k_2 = \frac{C - \sqrt{C^2 - 4R_n \cdot B}}{2B} \quad (3.11)$$

(корень $k_1 = (C + \sqrt{C^2 - 4R_n \cdot B}) / 2B > k_2$ не соответствует реальному состоянию элемента, так как в интервале $[k_2, k_1]$ выражение $1-\psi \cdot k$ обращается в нуль, а $\max \sigma = \infty$).

По условиям рассматриваемого примера (см. п.л. 3.1, 3.2.1) получим:

эйлерову силу (1.3) – $F_2 = 3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^8 \cdot 198 \cdot 10^{-8} / 3,5^2 = 319,05$ кН;

отношение (3.5) – $\psi = 12/319,05 = 3,761 \cdot 10^{-2}$;

наибольший прогиб (1.4) – $\max \Delta = 1,28 \cdot 10^{-2} / (1 - 3,761 \cdot 10^{-2}) = 1,33 \cdot 10^{-2}$ м; условие (3.4) –

$$\frac{12 \cdot 10^{-3}}{12 \cdot 10^{-4}} + \frac{3,98 \cdot 10^{-3}}{39,7 \cdot 10^{-6}} + \frac{12 \cdot 10^{-3} \cdot 1,1}{39,7 \cdot 10^{-6}} \cdot \frac{1,28 \cdot 10^{-2}}{(1 - 3,761 \cdot 10^{-2} \cdot 1,1)} =$$

$$= 10,00 + 100,25 + 4,02 = 114,27 \text{ МПа} < R = 200 \text{ МПа};$$

параметр (3.10) –

$$D = (12 \cdot 10^{-3} / 12 \cdot 10^{-4}) + (3,98 \cdot 10^{-3} / 39,7 \cdot 10^{-6}) = 110,25 \text{ МПа};$$

коэффициенты (3.8) и (3.9) –

$$B = 3,761 \cdot 10^{-2} \cdot 110,25 - \frac{12 \cdot 10^{-3} \cdot 1,28 \cdot 10^{-2}}{39,7 \cdot 10^{-6}} = 0,278 \text{ МПа}$$

и

$$C = 110,25 + 3,761 \cdot 10^{-2} \cdot 220 = 118,53 \text{ МПа};$$

действительный коэффициент запаса прочности (3.11)

$$k = k_2 = \frac{118,53 - \sqrt{118,53^2 - 4 \cdot 220 \cdot 0,278}}{2 \cdot 0,278} = 1,864,$$

при котором (3.6)

$$\frac{12 \cdot 10^{-3} \cdot 1,864}{12 \cdot 10^{-4}} + \frac{3,98 \cdot 10^{-3} \cdot 1,864}{39,7 \cdot 10^{-6}} + \frac{12 \cdot 10^{-3} \cdot 1,864}{39,7 \cdot 10^{-6}} \times$$

$$\times \frac{1,28 \cdot 10^{-2} \cdot 1,864}{(1 - 3,761 \cdot 10^{-2} \cdot 1,864)} = 18,64 + 186,87 + 14,46 =$$

$$= 219,97 \text{ МПа} \approx R_n = 220 \text{ МПа}$$

в пределах точности выполненных вычислений обращается в тождество (заметьте, что $k_1 = 424,5$ не может быть решением задачи, поскольку уже при $k=1/\psi=1/3,761 \cdot 10^{-2} = 26,59$ имеем $(1-\psi \cdot k) = (1-1,000) = 0$ и левую часть (3.6), равную бесконечности).

3.2.4. Оценка устойчивости стержня в плоскости, перпендикулярной поперечной нагрузке

Определить:

гибкость стержня

$$\lambda_y = \mu_y \cdot L / i_y; \quad (3.12)$$

коэффициент снижения расчетного сопротивления R

$$\varphi_y = \varphi + (\lambda - \lambda_y) \cdot (\varphi_+ + \varphi) / 10; \quad (3.13)$$

допускаемую сжимающую силу

$$F_y = \varphi_y \cdot R \cdot A, \quad (3.14)$$

где μ_y – коэффициент, определяемый по данным рис. 4 в зависимости от заданных условий опирания концов стержня в плане; L и i_y – длина рассчитываемого элемента и радиус инерции поперечного сечения двутавра относительно оси y ; λ – ближайшая большая к λ_y гибкость из таблицы прил. 2; φ и φ_+ – коэффициенты, принимаемые по прил. 2 при λ и $\lambda_- = \lambda - 10$; A – площадь поперечного сечения двутавра.

Проверить критерий устойчивости

$$F_y \geq F, \quad (3.15)$$

где F – приложенная центрально сжимающая продольная сила.

В соответствии с условиями п. 3.1. для случая рис. 5 будем иметь:

$$\text{гибкость (3.12) - } \lambda_y = 0,5 \cdot 5 / 1,22 \cdot 10^2 = 143,4;$$

$$\text{коэффициент (3.13) - } \varphi_y = 0,328 + (150 - 143,4) \cdot (0,376 - 0,328) / 10 = 0,360;$$

допускаемую сжимающую силу (3.14) –

$$F_y = 0,360 \cdot 200 \cdot 10^3 \cdot 12 \cdot 10^{-4} = 86,4 \text{ кН.}$$

Так как $F_y = 86,4 \text{ кН} > F = 12 \text{ кН}$, то условие устойчивости (3.15) удовлетворяется.

Замечание. Если $\lambda_y > 220$, то определяют F_y по формуле:

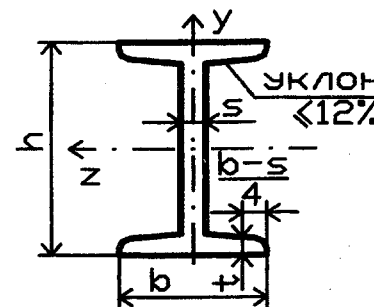
$$F_y = \pi^2 \cdot E \cdot J_y / (\mu_y \cdot L)^2 \cdot k_s, \quad (3.16)$$

где J_y – момент инерции двутавра относительно оси y (см. прил. 1); k_s – коэффициент запаса в расчетах на устойчивость, который можно принять равным 1,5.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П. Сопротивление материалов М.: Высшая школа, 2001.- 560 с.
2. Беляев Н.М. Сопротивление материалов. М.: Наука, 1976. - 608 с.

Двутавры стальные горячекатаные
(по ГОСТ 8239-89)



h – высота двутавра;
 b – ширина полки;
 s – толщина стенки;
 t – средняя толщина полки;
 A – площадь поперечного сечения;
 J – момент инерции;
 W – момент сопротивления;
 S – статический момент полусечения;
 i – радиус инерции.

Номер двутавра	Масса l м, кг	Размеры, мм				A , см ²	J_y , см ⁴	W_z , см ³	i_z , см	S_z , см ³	J_y , см ⁴	W_y , см ³	i_y , см
		h	b	s	t								
10	9,46	100	55	4,5	7,2	12	198	39,7	4,06	23	17,9	6,49	1,22
12	11,5	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	13,7	140	73	4,9	7,5	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55
16	15,9	160	81	5	7,8	20,2	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,7
18	18,4	180	90	5,1	8,1	23,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88
20	21	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	184	8,26	104	115	23,1	2,07
22	24	220	110	5,4	8,7	30,6	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27
24	27,3	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37
27	31,5	270	125	6	9,8	40,2	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54
30	36,5	300	135	6,5	10,2	46,2	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69
33	42,2	330	140	7	11,2	53,8	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79
36	48,6	360	145	7,5	12,3	61,9	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,89
40	57	400	155	8,3	13	72,6	19062	953	16,2	545	667	86,1	3,03
45	66,5	450	160	9	14,2	84,7	27696	1231	18,1	708	808	101	3,09
50	78,5	500	170	10	15,2	100	39727	1589	19,9	919	1043	123	3,23
55	92,6	550	180	11	16,5	118	55962	2035	21,8	1181	1356	151	3,39
60	108	600	190	12	17,8	138	76806	2560	23,6	1491	1725	182	3,54

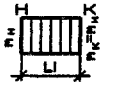
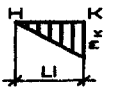
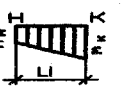

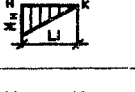
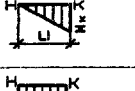
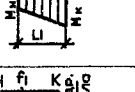
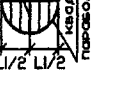
Приложение 2

Зависимость коэффициента φ от гибкости стержня λ

Сталь с $R=200$ МПа									
λ	φ	λ	φ	λ	φ	λ	φ	λ	φ
0	1	50	0,869	100	0,599	150	0,328	200	0,191
10	0,988	60	0,827	110	0,537	160	0,290	210	0,174
20	0,967	70	0,782	120	0,479	170	0,259	220	0,160
30	0,939	80	0,734	130	0,425	180	0,233		
40	0,906	90	0,665	140	0,376	190	0,210		

Приложение 3

Значения $\omega(x_i) \cdot m_C(x_i)$ при перемножении эпюр $M(x_i)$ и $m(x_i)$

$m(x_i)$ \ $M(x_i)$			
	1.1 $M_n \cdot m_n \cdot L$	1.2 $M_n \cdot m_k \cdot L/2$	1.3 $M_n \cdot (m_n + m_k) \cdot L/2$
	2.1 $M_n \cdot m_n \cdot L/2$	2.2 $M_n \cdot m_k \cdot L/6$	2.3 $M_n \cdot (2m_n + m_k) \cdot L/6$
	3.1 $M_k \cdot m_n \cdot L/2$	3.2 $M_n \cdot m_k \cdot L/3$	3.3 $M_k \cdot (m_n + 2m_k) \cdot L/6$
	4.1 $(M_n + M_k) \cdot m_n \cdot L/2$	4.2 $(M_n + 2 \cdot M_k) \cdot m_k \cdot L/6$	4.3 $L/6 [M_n \cdot (2m_n + m_k) + M_k \cdot (m_n + 2m_k)]$
	5.1 $2 \cdot f_i \cdot m_n \cdot L/3$	5.2 $f_i \cdot m_k \cdot L/3$	5.3 $f_i \cdot (m_n + m_k) \cdot L/3$
	$f_i = q \cdot l^2/8$		(3.1)

Приложение 4

Протокол расчета балки на ударное воздействие
по программе УДАР

Расчет выполнил: Петров А.И., 125 гр.

Исходные данные

Тип балки: бесконсольная.

Полная длина балки: 6.00 м.

Расстояние от левой опоры до подвергаемого ударному воздействию сечения: 3.00 м.

Расположение упругой опоры: с левой стороны балки.

Изгибная жесткость балки: 3.68 ГН·м².

Коэффициент податливости упругой опоры: 0.00400 м/кН

Вес падающего груза: 3.00 кН.

Высота падения груза: 0.100 м.

Полный вес балки: 0.124 кН.

Момент сопротивления балки: 184.0 см³.

Результаты расчетов

Максимальные динамические напряжения от удара в балке на жестких опорах $\sigma=191.0$ МПа.Максимальные динамические напряжения от удара в балке с упругой опорой $\sigma=149.2$ МПа.

Протокол расчета стержня на поперечную нагрузку
по программе **БАЛКА**

Расчет выполнил: Петров А.И., 125 гр.

Исходные данные

Тип балки: шарнирно опертая.

Длина балки: **3.50** м.

Координата левой опоры: **0.00** м

Координата правой опоры: **3.50** м.

Жесткость балки **EJ: 396.000** кН·м².

На балку действуют **0** сосредоточенных сил.

На балку действуют **0** пар сил.

На балку действуют **1** распределенных нагрузок.

Величина 1-ой нагрузки:

$q_1 = -2.600$ кН/м, **$q_2 = -2.600$** кН/м,

ее координаты: **$x_1 = 0.000$** м, **$x_2 = 3.500$** м.

Результаты расчетов

Значения опорных реакций: **$R_a = 4.550$** кН, **$R_b = 4.550$** кН.

Величина максимального изгибающего момента:

$M_{max} = 3.981$ кН·м, **$X_{max} = 1.75$** м.

x , м	$M(x)$, кН·м	$Q(x)$, кН	$V(x)$, мм
0.000	0.000	4.550	0.000
0.350	1.433	3.640	-4.027
0.700	2.548	2.730	-7.619
1.050	3.344	1.820	-10.431
1.400	3.822	0.910	-12.217
1.750	3.981	0.000	-12.829
2.100	3.822	-0.910	-12.217
2.450	3.344	-1.820	-10.431
2.800	2.548	-2.730	-7.619
3.150	1.433	-3.640	-4.027
3.500	0.000	-4.550	-0.000

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Краткие теоретические сведения.....	3
2. Расчет балки на удар	
2.1. Задание.....	4
2.2. Методические указания и пример аналитического расчета.....	5
3. Продольно-поперечный изгиб стержня	
3.1. Задание.....	10
3.2. Методические указания и пример аналитического расчета	12
Библиографический список	18
Приложение 1. Двутавры стальные горячекатаные (по ГОСТ 8239-89).....	19
Приложение 2. Зависимость коэффициента φ от гибкости стержня λ	20
Приложение 3. Значения $\omega(x_i)$ $m_c(x_i)$ при перемножении эпюр $M(x_i)$ и $m(x_i)$	20
Приложение 4. Протокол расчета балки на ударное воздействие по программе УДАР	21
Приложение 5. Протокол расчета стержня на поперечную нагрузку по программе БАЛКА	22

**РАСЧЕТ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ НА УДАР И ПРОДОЛЬНО-
ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ**

Методические указания к контрольным задачам по курсу “Сопротивление материалов” для студентов специальности ПГС заочной формы обучения

СОСТАВИТЕЛИ: доцент, к.т.н.

Александр Васильевич Резунов,

профессор, д.т.н.

Владимир Сергеевич Сафронов,

профессор ВГАСУ, к.т.н.

Александр Николаевич Синозерский

РЕДАКТОР – Акритова Е.В.

Подп. в печать ^{15.05.04} Формат 60x84 1/16. Уч.-изд. л. 1,5. Усл.-печ. 1,6.

Бумага для множительных аппаратов. Тираж ¹⁵⁰ Заказ № 221

Отпечатано в типографии Воронежского государственного архитектурно-строительного университета.

394006 Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84.